Correction Baccalauréat S - Obligatoire
Centres Étrangers - 12 Juin 2013

www.math93.com

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **6 points**

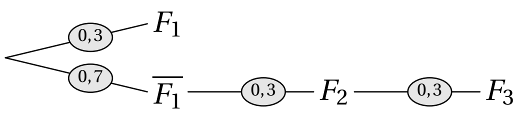
Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Quelle est la durée moyenne d'une vanne ?**
   La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$, donc la durée de vie moyenne est :
   $\boxed{E(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} = 5\,000 \text{ heures}}$.
2. **Calculer** $P(T > 6000)$.
   La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$, donc
   $\boxed{P(T > 6000) = \mathrm{e}^{-6000\lambda} = \mathrm{e}^{-1,2}}$

Partie B

1. **Arbre des probabilités**.



2. **Démontrer que** $P(E) = 0,363$.
   On a :
   $P(E) = P(F_1) \; + \; P\left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3\right)$
   $P(E) = \;\; 0,3 \quad + \quad 0,7 \times 0,3 \times 0,3$
   $\boxed{P(E) = 0,363 = 36,3\%}$

3. **Calculons la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche, sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures**.
   On cherche donc à calculer $P_E(F_1)$ soit :
   $P_E(F_1) = \dfrac{P(E \cap F_1)}{P(E)}$
   $P_E(F_1) = \dfrac{P(F_1)}{P(E)} = \dfrac{0,3}{0,363}$
   $\boxed{P_E(F_1) \approx 0,826 \text{ soit environ } 82,6\%}$.

Partie C L'industriel affirme que seulement 2% des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. **Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I, au seuil de 95 % de la variable F.**
   On a $n = 400$, $p = 2\%$ alors on sait que puisque $n = 400 \geq 30$, $np = 88 \geq 5$ et $n(1-p) = 392 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

   soit

$$I = \left[0,02 - 1,96\frac{\sqrt{0,02 \times 0,98)}}{\sqrt{400}} \; ; \; 0,02 + 1,96\frac{\sqrt{0,02 \times 0,98)}}{\sqrt{400}} \right]$$

Et donc $\boxed{I \approx [0,628\% \,;\, 3,375\%]}$.

2. **Test**.
On choisit 400 vannes au hasard dans la production, tirage assimilé à un tirage aléatoire avec remise. Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses soit une proportion de $p = \dfrac{10}{400} = 2,5\%$.
On a bien $p = 2,5\% \in I \approx [0,628\% \,;\, 3,375\%]$**, donc on ne peut pas remettre en cause, au seuil de** 95%**, l'affirmation de l'industriel**.

Partie D

La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $m = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. **Déterminons** $P(760 \leq D \leq 840)$.
La calculatrice nous donne $\boxed{P(760 \leq D \leq 840) \approx 68,3\%}$, arrondi au millième.

2. **Déterminons** $P(D \leq 880)$.
La variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $m = 800$, et d'écart-type $\sigma = 40$, représente la demande mensuelle, de ce fait D est positive et :
$P(D \leq 880) = P(0 \leq D \leq 880)$
$P(D \leq 880) \approx 0,9772499$
$\boxed{P(D \leq 880) \approx 97,7\%}$, arrondi au millième.

3. **L'industriel pense que s'il constitue un stock de 880 vannes, il n'aura pas plus de** 1% **de chances d'être en rupture de stock. A-t-il raison** ?
Le fait d'être en rupture de stock signifie que la demande D est supérieure strictement au stock de 880, on cherche donc $P(D > 880)$ soit :
$P(D > 880) = 1 - P(\leq D \leq 880)$
$P(D > 880) \approx 1 - 0,977$
$P(D > 880) \approx 0,023$
$\boxed{P(D > 880) \approx 2,3\% > 1\%}$, donc l'industriel a tort.

Exercice 2. **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère :
– Les points A(12 ; 0 ; 0), B(0 ; -15 ; 0), C(0 ; 0 ; 20), D(2 ; 7 ; -6), E(7 ; 3 ; -3) ;
– le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$.

Affirmation 1 : FAUSSE
Une équation cartésienne du plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ et passant par le point A est : $2x + y + 2z - 24 = 0$.
Le plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ est de vecteur normal, par exemple, $\overrightarrow{n_{\mathscr{P}}}\,(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
Sachant de plus qu'il passe par le point A(12 ; 0 ; 0), son équation est :
$2(x - 12) + (y - 0) - 2(z - 0) - 24 = 0$, soit $\boxed{2x + y - 2z - 24 = 0}$.
L'affirmation est FAUSSE.

Affirmation 2 : VRAIE

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $(AC)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9-3t \\ y & = & 0 \\ z & = & 5+5t \end{array}\right.,\ \forall t \in \mathbb{R}$

Une solution simple est de vérifier que les coordonnées des point A et C vérifient bien ces équations.

– **Pour A(12 ; 0 ; 0)**, on a bien en prenant $t = -1$, $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9-3t = 12 \\ y & = & 0 \\ z & = & 5+5t = 0 \end{array}\right.$;
– **Pour C(0 ; 0 ; 20)**, on a bien en prenant $t = 3$, $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9-3t = 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 5+5t = 20 \end{array}\right.$.
  Les point A et C appartiennent donc bien à la droite dont l'équation est donnée, cette droite est bien la droite (AC).

Affirmation 3 : FAUSSE
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun, si :
– soit (DE) est sécante au plan $\mathscr{P}$, dans ce cas, ils ont 1 seul point commun ;
– soit (DE) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$, dans ce cas ils en ont une infinité.
Le seul cas à exclure est donc le cas où le droite (DE) est parallèle, non incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

– Un vecteur directeur de la droite (DE) est $\overrightarrow{\text{DE}}\,(5\ ;\ -4\ ;\ 3)$;
– Le plan $\mathscr{P}$ est de vecteur normal, par exemple, $\overrightarrow{n_{\mathscr{P}}}\,(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
– Or $\overrightarrow{n_{\mathscr{P}}}.\overrightarrow{\text{DE}} = 2 \times 5 + 1 \times (-4) + -2 \times 3 = 0$ donc un vecteur directeur de la droite (DE) est orthogonal à un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$. La droite (DE) est donc parallèle au plan $\mathscr{P}$.
  Elle n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$ car par exemple D(2 ; 7 ; -6) n'appartient pas à $\mathscr{P}$: $2x+y-2z-5 = 0$, puisque $2 \times 2 + 7 - 2 \times (-6) - 5 = 18 \neq 0$

Affirmation 4 : VRAIE
La droite (DE) est orthogonal au plan (ABC).
On va montrer pour cela qu'un vecteur directeur de (DE) est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

– Un vecteur directeur de la droite (DE) est $\overrightarrow{\text{DE}}\,(5\ ;\ -4\ ;\ 3)$;
– Pour le plan (ABC) :
  Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}\,(-12\ ;\ -15\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\,(-12\ ;\ 0\ ;\ 20)$ sont deux vecteurs non colinéaires, du plan (ABC) ;
– Or $\overrightarrow{\text{DE}}$ est orthogonal à ces deux vecteurs car les produit scalaires avec $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont nuls :
  – D'une part : $\overrightarrow{\text{DE}}.\overrightarrow{\text{AB}} = 5 \times (-12) - 4 \times (-15) + 3 \times 0 = 0$;
  – D'autre part : $\overrightarrow{\text{DE}}.\overrightarrow{\text{AC}} = 5 \times (-12) - 4 \times 0 + 3 \times 20 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{DE}}$ est donc bien orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) de base du plan (ABC), ce qui prouve que (DE) est orthogonal au plan (ABC).

Exercice 3. **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A
Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$.

On note :
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$;
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
- La fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$.
  On admet que : $\forall x \in [0 ; 1], g(x) \geq 0$.

1. Les aires sont exprimées en unités d'aire.

a. Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.
La fonction G, définie par $G(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ est clairement une primitive de g puisque $G'(x) = g(x)$.
$\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^a = \left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^a$
$\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} - \left(0 - \mathrm{e}^{-0}\right)$
On a donc $\boxed{\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1}$

b. Exprimons $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.
On a
$\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_a^1 = \left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_a^1$
$\mathscr{A}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-1} - (a - \mathrm{e}^{-a}) =$
On a donc $\boxed{\mathscr{A}_2 = 1 - a - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-a}}$

Soit f la fonction définie pour tout réel x sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = 2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

a. Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 1]$.
La fonction f est définie sur $[0 ; 1]$ et dérivable comme somme de fonctions qui le sont.
$\forall x \in [0 ; 1]$, on a $f'(x) = 2 + 2\mathrm{e}^{-x} > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
f	$f(0) = -2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -1,6$	$f(1) = -2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 1,6$

b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0 ; 1]$ en un réel α. Donner la valeur de α au centième.

- La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- Le réel $k = 0$ est compris entre $f(0) = -2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -1,6$ et $f(1) = -2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 1,6$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

Avec un pas de 0,1 on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} f(0,4) & \approx & -0,17276 \\ f(0,5) & \approx & 0,1548 \end{array}\right.$, donc $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$.

Avec un pas de 0,01 on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} f(0,45) & \approx & -0,0074 \\ f(0,46) & \approx & 0,02531 \end{array}\right.$, donc $\boxed{0,45 \leq \alpha \leq 0,46}$.

2. **Déterminons alors une approximation du réel a pour lequel les deux aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.**
   On a :
   $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff a - \mathrm{e}^{-a} + 1 = 1 - a - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-a}$
   $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff 2a - 2\mathrm{e}^{-a} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0$
   $\boxed{\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff f(a) = 0}$

   Donc d'après la question précédente, un encadrement du réel a pour lequel les deux aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales est : $\boxed{0,45 \leq a \leq 0,46}$, et donc **une approximation au centième par défaut de a est 0,45**.

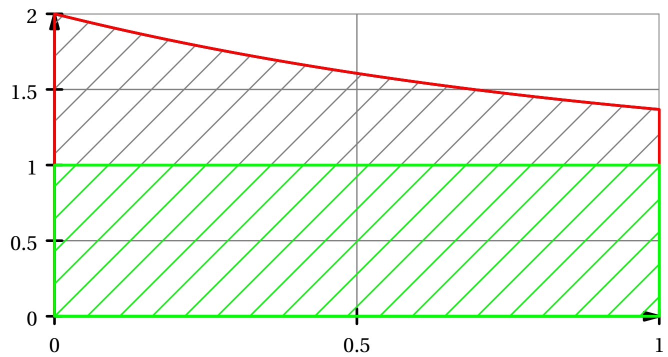
Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

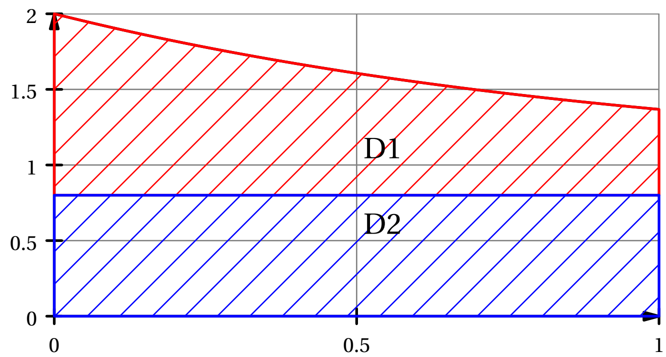
1. **Justifier l'égalité par un argument graphique** $b < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   - Graphiquement, l'aire $\mathscr{A}$ est strictement inférieure à l'aire du rectangle de côtés 1 et 2 soit à 2 unités d'aire.
   - De plus, l'aire du rectangle de côté 1 et $g(1)$ est clairement supérieure à 1, en effet $1 \times g(1) = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} > 1$;
   - De ce fait il est nécessaire que $b < g(1)$ sinon la portion de $\mathscr{D}$ au dessous de la droite d'équation $y = b$ est supérieure 1 ;
   - Cela qui est impossible si on veut que cette droite partage le domaine $\mathscr{D}$, d'aire inférieure à 2, en deux parties de même aire.

   On a donc montré que $\boxed{b < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$.

2. **Déterminer la valeur exacte de b.**
   On cherche b qui permet de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines $\mathscr{D}_1$, et $\mathscr{D}_2$ de même aire, l'un, $\mathscr{D}_1$ situé au dessus de la droite d'équation $y = b$, l'autre, $\mathscr{D}_2$, au dessous.

D'après la question précédente, le domaine $\mathscr{D}_2$ est un rectangle de côtés 1 et b, donc d'aire $\mathscr{A}ire(\mathscr{D}_2) = b$.
De plus l'aire de ce rectangle doit être égale à la moitié de l'aire du domaine $\mathscr{D}$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{A}ire(\mathscr{D}_2) & = & \frac{1}{2}\mathscr{A}ire(\mathscr{D}) \\ b & = & \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left[G(x)\right]_0^1 \\ b & = & \frac{1}{2}\left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\ b & = & \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{0}\right) \end{array}$$

Et donc $\boxed{b = \frac{1}{2}\left(2 - \mathrm{e}^{-1}\right)}$.

Exercice 4. — 5 points

candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme de la suite, un élève propose l'algorithme ci-dessous dans lequel il a oublié de compléter deux lignes.

1. **Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.**

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur $1,5$
Traitement :	Tant que $n < 9$
	Affecter à u la valeur $\boxed{\dfrac{n \times u + 1}{2(n+1)}}$
	Affecter à n la valeur $\boxed{n+1}$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher la variable u

2. **Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9. ?**
   Il faut placer l'instruction d'affichage dans la boucle, comme on veut l'affichage de u_2 jusqu'à u_9 cette instruction doit figurer après l'affectation de u (si on place l'instruction avant on aura l'affichage des termes de u_1 jusqu'à u_8). Cela donne l'algorithme :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur $1,5$
Traitement :	Tant que $n < 9$
	Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u + 1}{2(n+1)}$
	Afficher la variable u
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin de tant que

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).
On peut conjecturer que la suite est décroissante et qu'elle converge vers 0.

Partie B - Étude mathématique
On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. **Monter que la suite** (v_n) **est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme**.
   Pour tout entier n on a :
   $$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & (n+1)u_{n+1} - 1 \\ v_{n+1} & = & (n+1)\dfrac{nu_n+1}{2(n+1)} - 1 \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{2}(nu_n+1) - 1 \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{2}(nu_n-1) \end{array}$$
   Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

   La suite (v_n) **est géométrique, de raison** $q = \frac{1}{2}$ **et de premier terme** $v_1 = u_1 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

2. **En déduire que pour tout entier , on a :** $u_n = \dfrac{1+(0,5)^n}{2}$.

   – La suite (v_n) est géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, donc sont expression en fonction de n est : $v_n = v_1 \times q^{n-1}$, soit :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{n \geq 1,\ v_n = \frac{1}{2} \times 0,5^{n-1} = 0,5^n}$.

   – De plus pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$ et donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{n \geq 1,\ u_n = \dfrac{v_n+1}{n}}$.

   – On en déduit alors que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\boxed{n \geq 1,\ u_n = \dfrac{0,5^n+1}{n}}$

3. **Déterminer la limite de la suite** (u_n).
   On sait que si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc
   $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+0,5^n\right) = 1$.

   De ce fait : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0}$.

4. **Justifier que, pour tout entier , on a** : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1+(1+0,5n)\times 0,5^n}{n(n+1)}$.
   En déduire le sens de variation de la suite .
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,
   $$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{0,5^{n+1}+1}{n+1} - \dfrac{0,5^n+1}{n} \\ u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{n\left(0,5^{n+1}+1\right)}{n(n+1)} - \dfrac{(n+1)\times(0,5^n+1)}{n(n+1)} \\ u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{n0,5^{n+1}+n-n0,5^n-n-0,5^n-1}{n(n+1)} \\ u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{0,5^n(n\times 0,5-n-1)-1}{n(n+1)} \\ u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{0,5^n(-0,5n-1)-1}{n(n+1)} \end{array}$$

Et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{n \geq 1,\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1+(1+0,5n)\times 0,5^n}{n(n+1)}}$.

En déduire le sens de variation de la suite .

Tous les facteurs qui interviennent dans la fraction sont positifs strictement,

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ \dfrac{1+(1+0,5n)\times 0,5^n}{n(n+1)} > 0$ et donc

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ -\dfrac{1+(1+0,5n)\times 0,5^n}{n(n+1)} < 0,$

De ce fait, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc **la suite** (u_n) **est strictement décroissante**.

Partie C - Retour à l'algorithme

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Notons tout d'abord que ce plus petit entier existe car d'après la question B3., la suite (u_n) tend vers 0.
A partir d'un certain rang, tous les termes de la suite seront donc inférieur à 0,001.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur $1,5$
Traitement :	Tant que $u \geq 0,001$
	Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u + 1}{2(n+1)}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher la variable n